

一般研究

1 CAEによる熱交換器配管の乱流熱伝達特性の解析

機械部 大塚 裕 俊

要 旨

CAEによる熱交換器配管の乱流熱伝達特性の把握のため、 $k-\epsilon$ 乱流モデルによるソフトウェアを用いて単管モデル及び千鳥型の熱交換器管列のモデル化と熱伝達特性解析を実施しその評価を行った。必要に応じて基礎方程式や乱流のモデル化の手法、熱的境界条件や離散化手法についても概説した。

1. 緒 言

近年地球環境の保全やエネルギー資源の枯渇化が話題となり、資源の有効活用や省エネルギーに関する技術開発が諸処で行われている。

熱エネルギー関連機器の中でも、熱交換器はシステムのエネルギー効率を決定的に左右する重要な要素機器であるため、以前からその性能向上のため、さまざまな研究が進められてきた。

しかしながらその多くは実験的・経験的な研究が主流であり、最も基本的な管列型熱交換器についても現実的にはその対象となる流れは大きなレイノルズ数の支配する乱流状態となる場合がほとんどであるため、理論的なアプローチは困難な場合が多かった。

ところが近年の流体の数値解析手法の進展は、乱流状態の流れについてもその特性把握において一定の条件下ではあるが、成功をおさめつつある。

一般に乱流のモデル化では、複雑な方程式系を時間平均則を利用した仮定に基づいて単純化し、経験則で補正して解ける形に追い込み計算するのが常道となっている。工学的な計算では例えばこのような時間平均値による特性把握でも十分な場合が多く、CAEによる理論的アプローチがその力量を発揮する場合は、乱流を取扱うモデルの特性向上などに伴い今後ますます広がっていくと考えられる。

本論文では、現在乱流状態の流体の数値解析手法として一般的な評価を得ている $k-\epsilon$ モデルを利用したソフトウェア（FLUENT）を用いて熱交換器配管の乱流熱伝達特性の解析を行い、主として経験値との比較によりその評価を行う。

そのためまず時間平均則と乱流の空間等方性をポイントする $k-\epsilon$ モデルについて概説するとともに、熱伝達特性の把握のため重要な熱的境界条件について、そのモデル化を中心に記述する。また同時に利用したソフトウェアでの離散化手法についても言及する。次に数値解析の前段階として単管モデルでの熱伝達特性の解析を行った上で、千鳥型の熱交換器管列のモデル化とその熱伝達特性解析へと進み、その評価を行う。

なお乱流状態の空間非等方性を前提とするレイノルズ応力モデル（Reynolds stress model）や、近年研究が進められた統計力学による理論的乱流モデルであるRNG（Renormalization Group Theory）による手法は有力であり、その適用と評価も大変興味のあるところであるが、今回は別稿にゆだねることとする。[1]

2. 基礎方程式と $k-\epsilon$ モデル

2.1 基礎方程式

流体の挙動を把握するための物理的な方程式は質量保存式、運動量保存式、エネルギー保存式の3つである。いずれも直交座標上で流体の微小体積中での各々の物理量の保存（つりあい）から導出されるものである。これらの方程式はすべて一般的なものであり、その導出については流体力学の書籍を参考とされたい。[2][3][4]

質量保存式：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0 \quad (1)$$

ρ ：密度

u ：速度

運動量保存式：

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i \quad (2)$$

p : 圧力

g : 重力加速度

なお τ_{ij} は応力テンソルであり、流体の粘性による応力項を表し、以下で与えられる。(なお τ_{ij} の導出については、文献[3]を参照のこと。)

$$\tau_{ij} = \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right] \delta_{ij} \quad (3)$$

$$\text{但し } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

μ : 粘性係数

エネルギー保存式：

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho h) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i h) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial p}{\partial t} + u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + S_s \quad (4)$$

λ : 熱伝導率

S_s : 熱源

h : エンタルピー

2. 2 k-εモデル

以上の方程式は非線形項を多く含み、レイノルズ数 (Re) が増加すると流体の粘性による効果よりも慣性による効果が大きくなり、大小スケールの渦を伴う乱流へと移行し、限られたメッシュ数やコンピュータ資源では到底コスト的に実用的でない数値計算となってしまいます。

そこで乱流を取扱うため、乱流変動のある流れでの物理量を時間的平均値と変動成分の和として表現するアプローチ (レイノルズ平均操作) を用いる。[5][6]

今、速度 u_i を時間平均値 $\overline{u_i}$ と変動成分 u'_i によって

$$u_i = \overline{u_i} + u'_i \quad (5)$$

とあらわす。これを (2) 式の運動量保存式に代入し、あらためて $\overline{u_i}$ を u_i と書き直すと

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho u'_i u'_j}) + \rho g_i \quad (6)$$

となる。 $\overline{\rho u'_i u'_j}$ 部分はレイノルズ応力と呼ばれ、乱流によって生じる項となる。この変動項 (相関項) を平均流 (主流) の特性により表現すれば、1つの乱流モデルを構成することが出来る。層流での応力テンソル (3) 式との相似によりブシネスク近似として知られる次式を仮定する。

$$\overline{\rho u'_i u'_j} = \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} + \mu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu_t \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{ij} \quad (7)$$

$$\text{但し } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

ここで

$$k : \text{乱流エネルギー} = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}$$

μ_t : 乱流粘性係数

k は乱流エネルギーとして定義される速度の変動成分による物理量である。また乱流粘性係数 μ_t は乱流の速度スケールと大きさ (長さ) のスケールの積に比例するという仮定 (Prandtl-Kolmogoroff 仮定) により (速度スケール $\propto k^{1/2}$ 、長さスケール $\propto k^{3/2}/\epsilon$) 以下のように入れられる。 ϵ は k の消散率として定義される物理量である。

$$\mu_t = \rho C_u \frac{k^2}{\epsilon} \quad (8)$$

C_u : 実験による比例定数

このようにして定義された新しい物理量、即ち乱流エネルギー k とその消散率 ϵ についても微小体積中での保存式を構成でき、これにより全ての方程式系を解ける形に完結させることができる。

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i k) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + G_k - \rho \epsilon \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \epsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i \epsilon) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right) + C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} G_k - C_{2\epsilon} \rho \frac{\epsilon^2}{k} \quad (10)$$

$C_{1\epsilon}$ 、 $C_{2\epsilon}$: 実験定数

σ_k 、 σ_ϵ : 乱流拡散プラントル数

壁（固体）の熱伝達係数 h_{ext} は次のようになる。

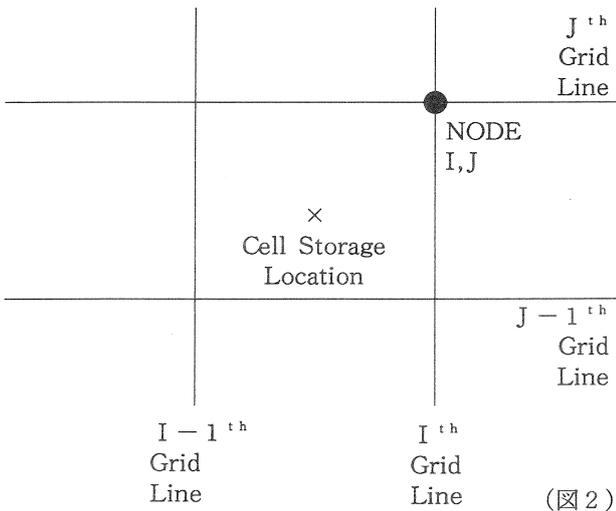
$$h_{ext} = \frac{\lambda_w}{t} \quad (19)$$

T_{ext} は壁（固体）の外側の表面温度であるが、これを管内を流れる水の温度 T_w と等しいとすれば、外部（水）への熱移動の定常状態を求めることが可能となる。

4.0 離散化手法について

今回利用したソフトウェア（fluent）では、コントロールボリュームに基づく有限差分法を用いている。本手法では、微分方程式を各セルに対して積分し、それぞれの物理量がコントロールボリューム基準で保存されるような有限差分表現式を得ている。セル上では図2に示すような格子に基づいて変数を保存している。この手法では、すべての方程式のすべての変数（圧力、速度成分、および他のすべてのスカラー量）に対して同じコントロールボリュームを用い、全変数をセルの中心で定義する。[5][8]

微分方程式の積分について、一次元の方程式を例にとり、直交座標に対して考える。まずはじめに、流体についての3つの方程式（連続の式、運動量の式およびエネルギーなどスカラー量 ϕ の式）の一次元方程式を考える。



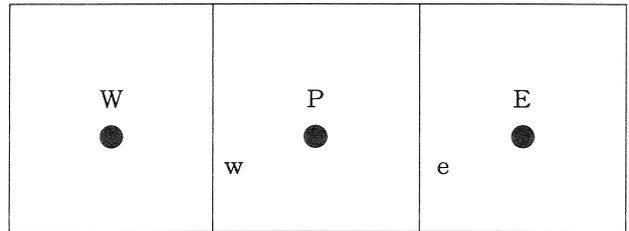
$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) = 0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u u) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) \quad (21)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u \phi) = \frac{\partial}{\partial x} \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} + S \phi \quad (22)$$

(20)~(22)式は発散定理（ガウス定理）を用いて各コントロールボリュームに対して積分できる。

$$\int_{\text{volume}, V} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dV = \int_A \rho u \cdot dA \quad (23)$$



(図3)

図3のコントロールボリュームに対して(20)式を積分すると次式を得る。

$$(\rho u A)_e - (\rho u A)_w = 0 \quad (24)$$

$$J_e = (\rho u A)_e, J_w = (\rho u A)_w \text{ と表せば上式は}$$

$$J_e - J_w = 0 \quad (25)$$

運動量の(21)式を積分すると次式を得る。

$$\begin{aligned} & (\rho u^2 A)_e - (\rho u^2 A)_w = - (p_e - p_w) A \\ & + \left(\mu \left(\frac{u_e - u_p}{\Delta x} \right) A \right)_e - \left(\mu \left(\frac{u_p - u_w}{\Delta x} \right) A \right)_w \end{aligned} \quad (26)$$

同様に变形して

$$\begin{aligned} & J_e u_e - J_w u_w = - (p_e - p_w) A \\ & + \left[\frac{\mu_e}{\Delta x_e} (u_e - u_p) - \frac{\mu_w}{\Delta x_w} (u_p - u_w) \right] A \end{aligned} \quad (27)$$

スカラー量の(22)式を積分すると同様に次式を得る。

$$\begin{aligned} J_e \phi_e - J_w \phi_w &= \left(\Gamma_e \frac{\phi_e - \phi_p}{\Delta x_e} - \Gamma_w \frac{\phi_p - \phi_w}{\Delta x_w} \right) A \\ & + S \phi \end{aligned} \quad (28)$$

これらの代数方程式系は一般的な数値計算の手段により解くことが出来る。さらにこの原理をBFC (Body Fitted Coordinate) など曲線座標系を用いた柔軟な座標系に拡張することが可能である。

5. 単管モデルでの解析

単管モデルによる乱流熱伝達解析を行った結果を以下に示す。

気体流（空気）～管内流（水）間の伝熱をモデル化し、図1に示すようなグリッド分割と境界条件で解析を行った。結果は以下のような無次元数で表示する。

また得られた結果を図2～図12に示す。流れ図等では $Re = 3000$ の場合を示す。

$$\text{レイノルズ数 } Re = \frac{v_0 \cdot D}{\mu / \rho} \quad (29)$$

$$\text{ヌセルト数 } Nu = \frac{h_f \cdot D}{\lambda} \quad (30)$$

$$\text{圧力降下係数 } f = \Delta p / \frac{1}{2} \rho v_0^2 \quad (31)$$

- v_0 : 入口での流速
- D : 配管の直径
- μ : 粘性係数
- ρ : 密度
- h_f : 熱伝達係数
- Δp : 圧力低下 (上流入口～下流出口間)
- λ : 領域平均温度 T_A に対する熱伝達率

Zusauskasの式による円柱まわり流れの平均ヌセルト数の経験式[9]

$$Nu_m = 0.26 Re^{0.6} Pr^{0.37} \left(\frac{Pr^{0.25}}{Pr_w} \right) \quad (32)$$

(1000 < Re < 200000)

Pr_w : 管壁での流体のプラントル数

Pr : 主流での "

も同時に示す。(図8)

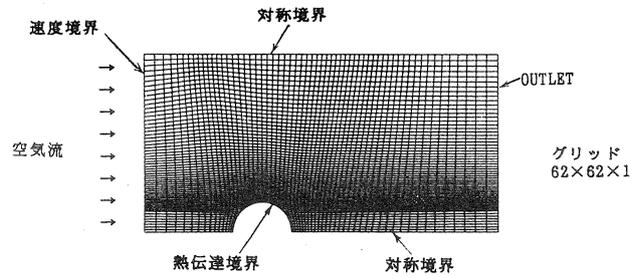


図1 単管モデルの計算格子と境界条件

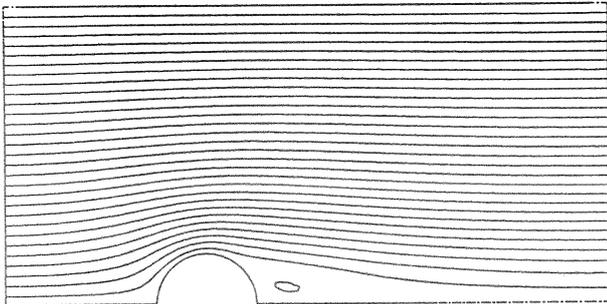


図2 流れ線図

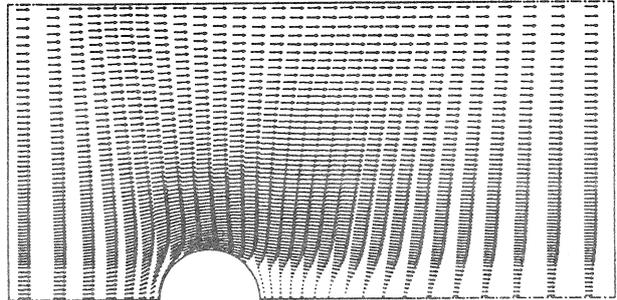


図3 速度ベクトル図

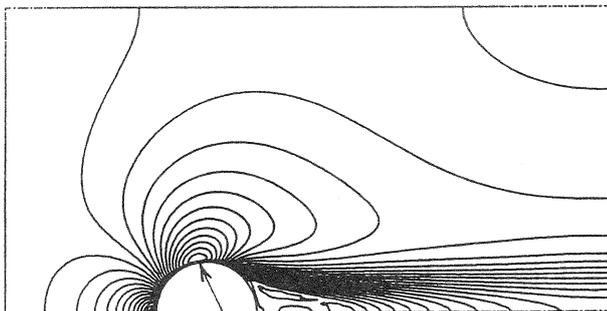


図4 等速度線図

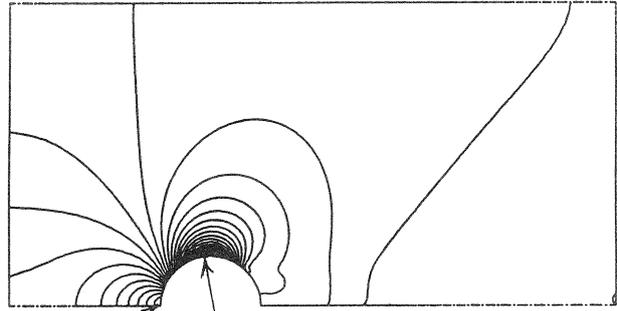


図5 等圧力線図

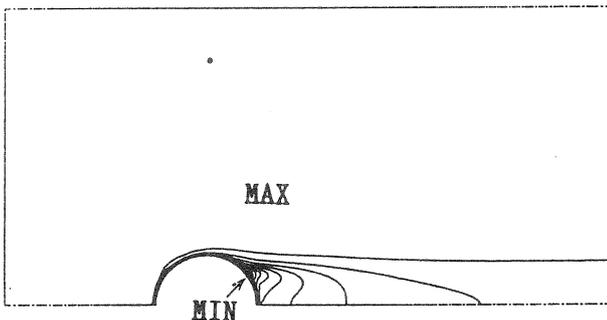


図6 等温度線図

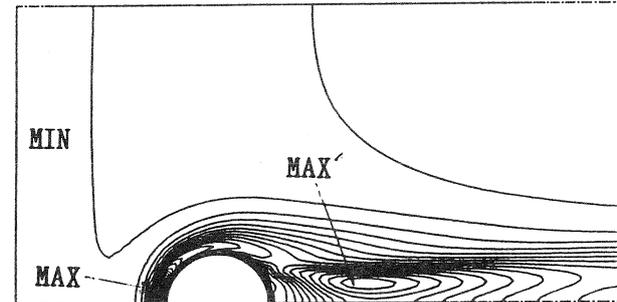


図7 等乱流エネルギー線図

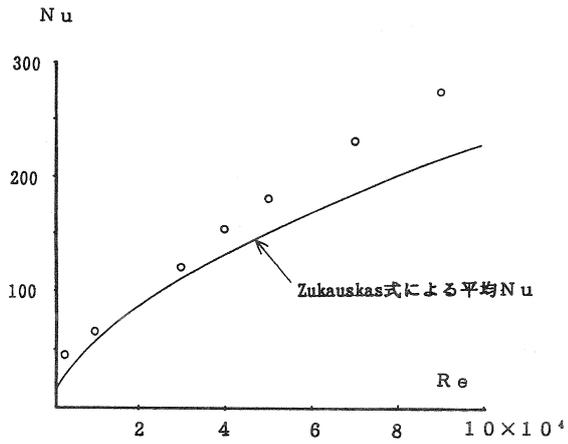


図8 ReによるNuの変化 (単管モデル)

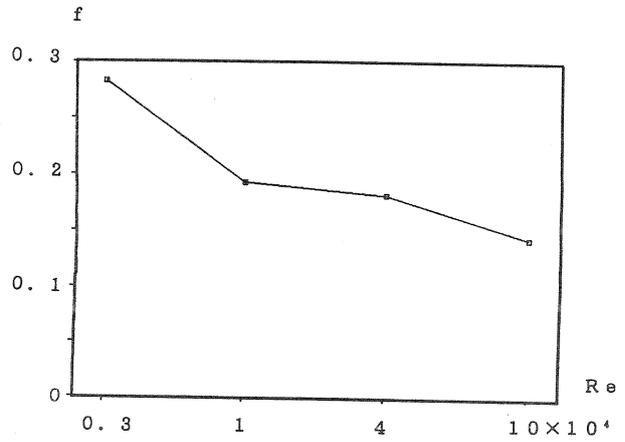


図9 Reによる圧力降下係数 f の変化 (単管モデル)

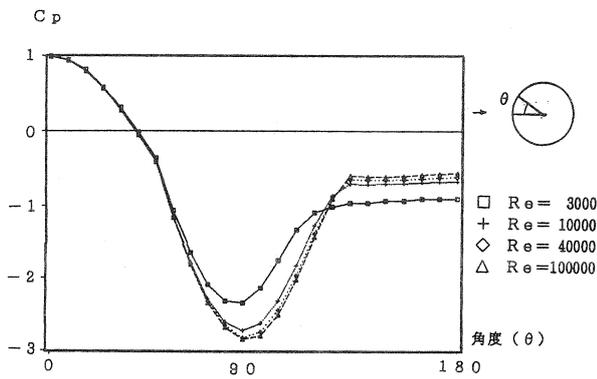


図10 管壁での圧力係数Cpの変化 (単管モデル)

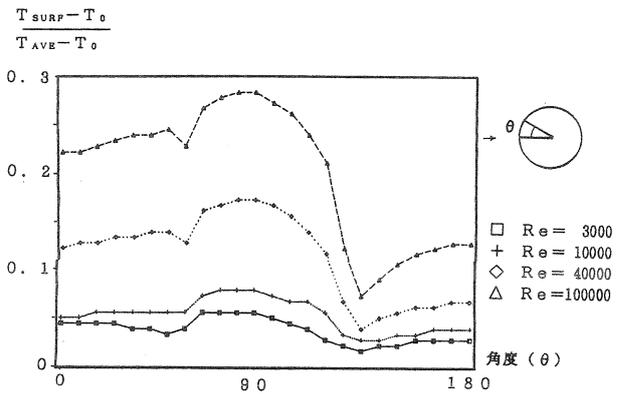


図11 管壁での温度の変化 (単管モデル)

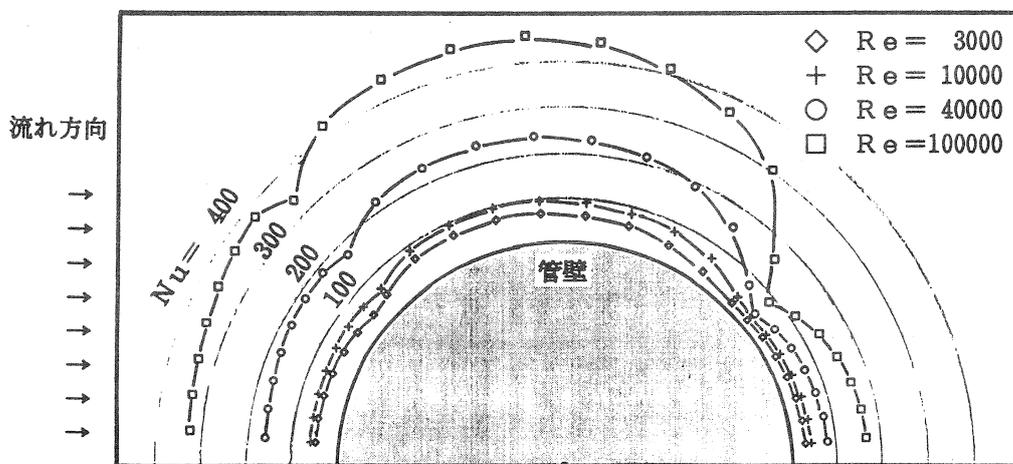


図12 管壁でのNuの変化 (単管モデル)

6. 千鳥配管列モデルでの解析

千鳥配管列モデルによる乱流熱伝達解析を行った結果を以下に示す。グリッド分割と境界条件は前のケースとほぼ同等である。(図13～図14)

配管相互の影響による流れや熱伝達性能の変化がポイントであるが、計算の経済性を考慮した上で3列の千鳥配管ブロックを1単位としてモデル化する。

そしてこの2列目の配管についてデータを収集する。結果は以下のような無次元数で表示する。得られた結果を図16～図32に示す。流れ図等では $Re = 3000$ の場合を示す。

$$\text{レイノルズ数} \quad Re = \frac{v_{max} \cdot D}{\mu / \rho}$$

$$\text{ヌセルト数} \quad Nu = \frac{h_f \cdot D}{\lambda}$$

$$\text{圧力降下係数} \quad f = \Delta p / \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right)$$

$$\text{流れ方向の配管ピッチ比} \quad X = x / D$$

$$\text{流れ方向に直角の配管ピッチ比} \quad Y = y / D$$

v_{max} : 最小流路での平均速度
 x : 奥行配管ピッチ
 y : 幅 //

X, Yについては図15を参照のこと。

Grims onの空気流についてのX, Yによるヌセルト数の変化の経験値[9]も同時に示す。(図22)

$$Nu_m = 0.522 \cdot Re^{0.562} \quad (33)$$

(X = 1.25, Y = 3のとき)

7. 考察

単管モデルでは Re と管壁での平均ヌセルト数 Nu の関係は図8に示すように $5000 < Re < 40000$ 程度の範囲ではZukauskasの経験式とよい一致を示す。しかし $40000 < Re$ では Nu は経験値よりも大きな値となる。

また、管壁での Nu の分析をみると、図12のように Re の増加とともに $\theta = 90^\circ$ (流れに直角方向)付近を中心とした Nu の最大値が増加している。しかし、こ

れは Re の増大とともに配管後流部での Nu も増大していくという経験値データとはかなり異なった結果となっている。[8]今後の乱流伝熱モデルの構成や適用について検討を要する部分となろう。また管壁温度 T_{surf} についての無次元化したものが図11であるが、 Nu と同様に $\theta = 90^\circ$ 付近で最大値があらわれる。

また、圧力降下係数 f は図9のように Re とともに低下している。しかし、管壁での圧力変化を無次元化した C_p の分布(図10)から、 Re が増大するほど後流の剥離位置が後退するとともに、 $\theta = 90^\circ$ 付近での C_p の最小値が大きくなり $C_p = -3$ に近づいていくのがわかる。

千鳥配管列モデルでは、 Re と管壁での平均ヌセルト数 Nu の関係は、図22のように単管モデルで良好な結果を示した Re の範囲においてGrims on式による経験値とその増加傾向においてよく合致している。但し、経験式によれば後部列の配管の Nu は前部列の配管による乱れの増大によって増加する傾向を示す。

また、管壁での Nu の分布では図26のように Re の増加によりその最大値をとる位置が $\theta = 70^\circ$ 付近から $\theta = 100^\circ$ 付近へと後退するとともに管壁の先端部($\theta = 0^\circ$ 付近)を除いて全体的に Nu が増大してゆく傾向を示している。これは図25のように管壁温度 T_{surf} の分布でも同様である。

また図23のように圧力降下係数 f は、配管ピッチ比によって差はあるもののいずれも Re の増大とともに減少する傾向にある。管壁での圧力係数 C_p の変化は図24のように Re が小さい場合、配管相互の影響が顕著に見られ、流れの上流部管壁と下流部管壁での変化が複雑になる。

配管ピッチ比を変化させた場合を見ると、流れと直交する方向の配管ピッチ比(Y)の変化による管壁での Nu の変化はXに比べて非常に複雑な変化傾向を示す。

(図27～図28) 流れと同じ方向の配管ピッチ比Xを変化させると、Xの減少とともに Nu は全体的に増加することがわかるがYでは一概には判断できない。

(図27～図28)

このことは配管ピッチ比X, Yによる平均ヌセルト数 Nu の変化をとっても同様である。

図30のようにXの増加により Nu は減少しているが、Yを変化させた場合では図29のように Re の大きい範

囲でNuの増加傾向が示されるだけである。

意味することから明らかである。またXの増加によって

圧力降下係数 f はYの増加により顕著に減少する。

も f は減少する傾向を示す。(図3 2)

(図3 1) これは流れと直交する方向の流路幅の拡大を

グリッド 182×42×1 但しこの例は $X = x/D = 2$ のケース
 $Y = y/D = 2$

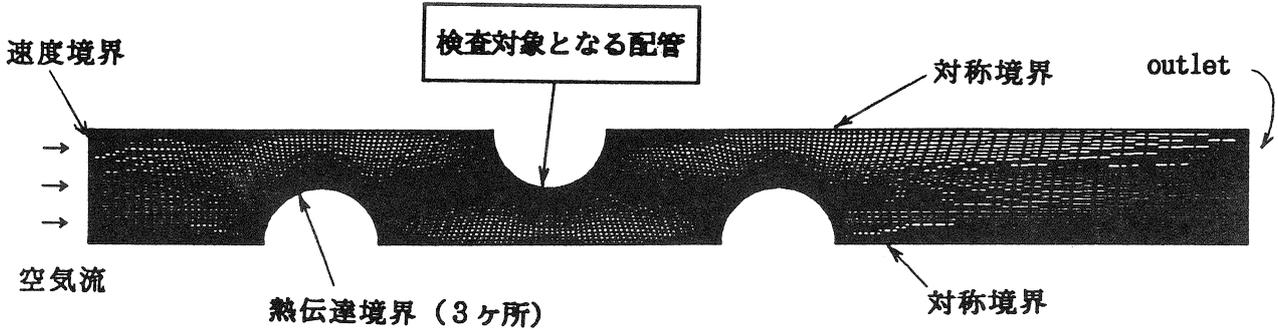


図13 千鳥配管列モデルの計算格子と境界条件

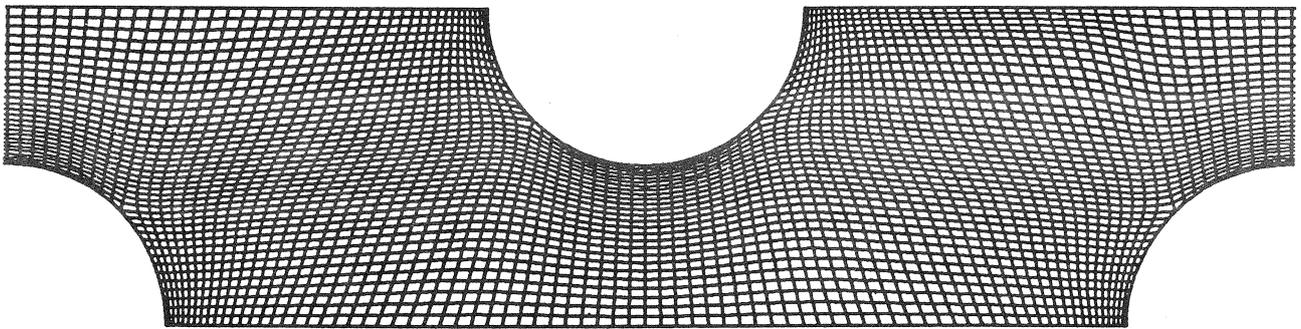


図14 千鳥配管列モデルの計算格子 (部分拡大)

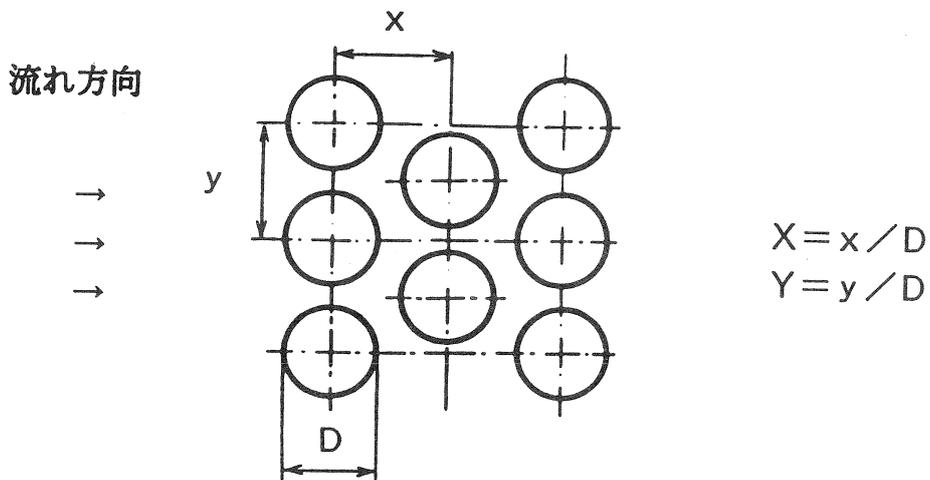


図15 配管ピッチ比 X Y

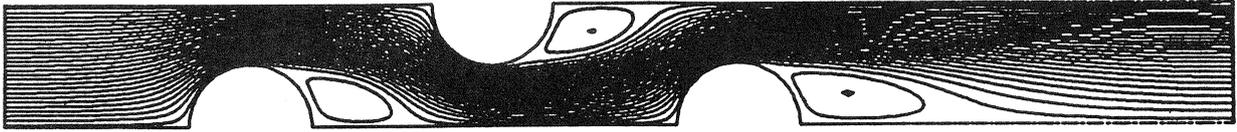


図16 流れ線図 (X = 2、Y = 2)

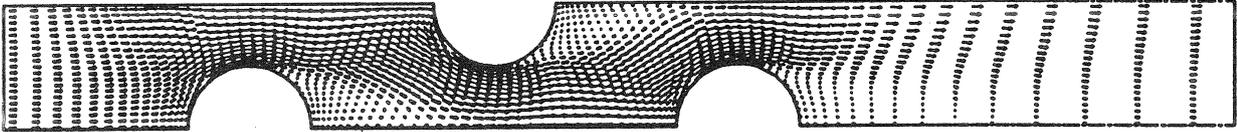


図17 速度ベクトル図 (X = 2、Y = 2)

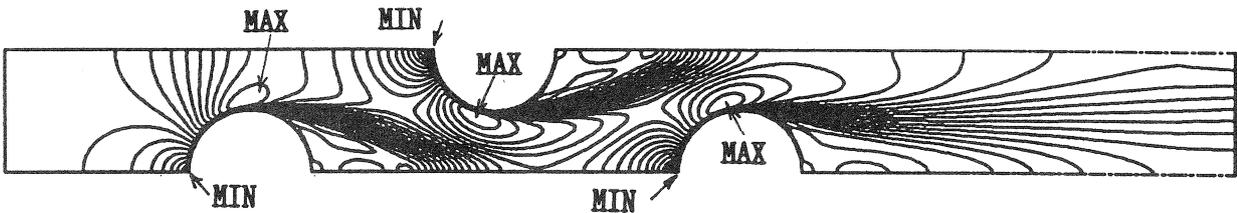


図18 等速度線図 (X = 2、Y = 2)

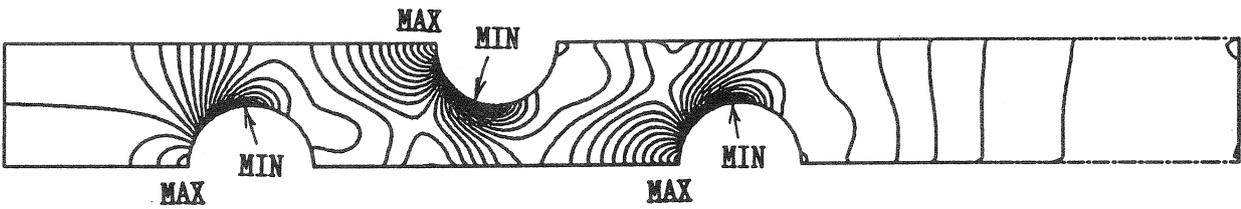


図19 等圧力線図 (X = 2、Y = 2)



図20 等温度線図 (X = 2、Y = 2)

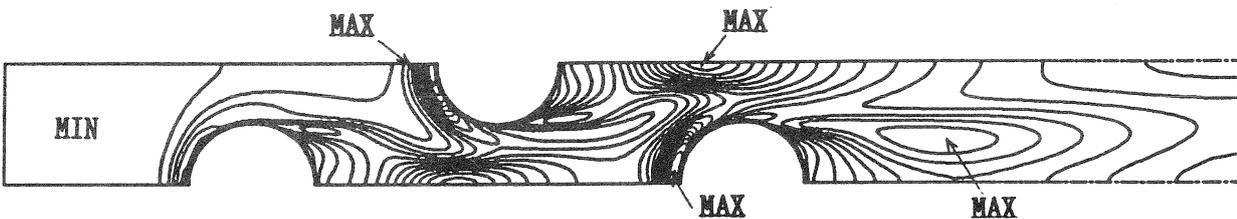


図21 等乱流エネルギー線図 (X = 2、Y = 2)

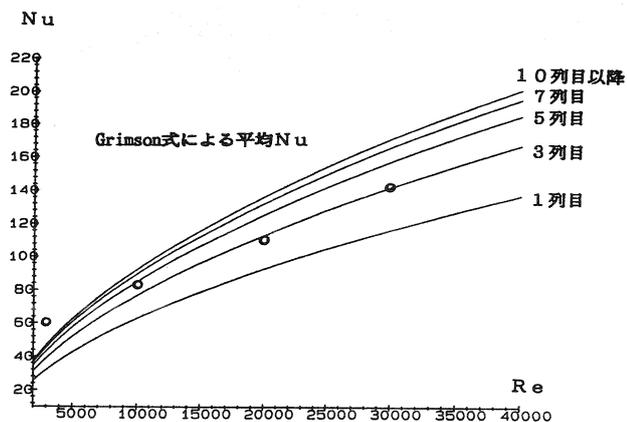


図22 ReによるNuの変化
(配管ピッチ X比 X=1.25、Y=3)

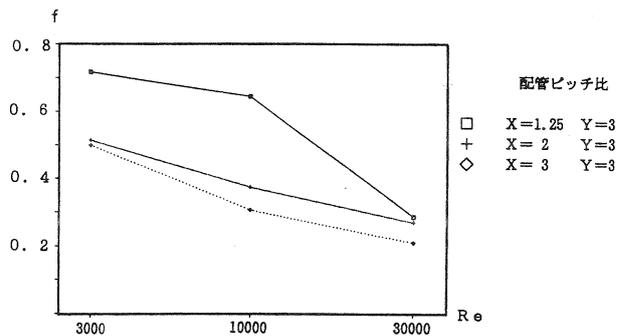


図23 Reによる圧力降下係数 f の変化

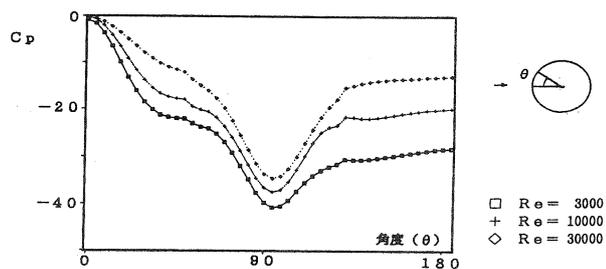


図24 管壁での圧力係数 Cp の変化
(配管ピッチ比 X=Y=1.25)

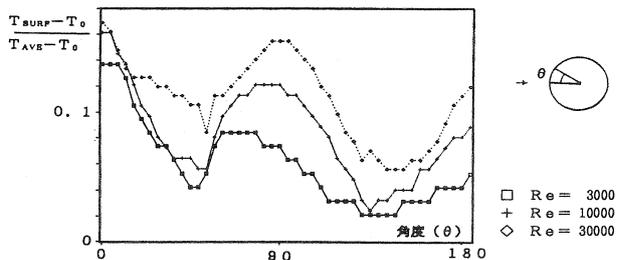


図25 管壁での温度の変化
(配管ピッチ比 X=Y=1.25)

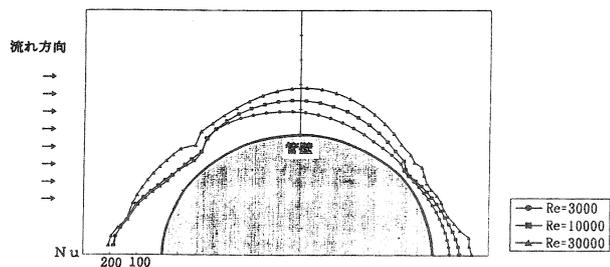


図26 管壁でのNuの変化
(配管ピッチ比 X=Y=1.25)

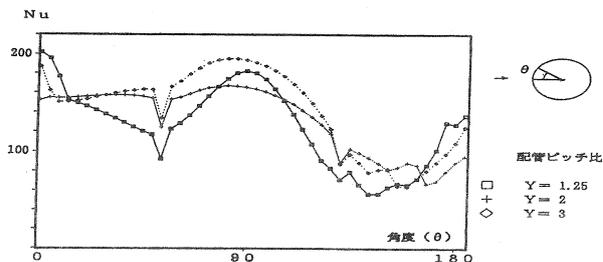


図27 管壁でのNuの変化
(配管ピッチ比 X=1.25 Re=30000)

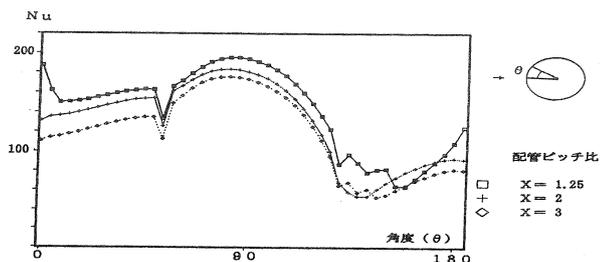


図28 管壁でのNuの変化
(配管ピッチ比 Y=3 Re=30000)

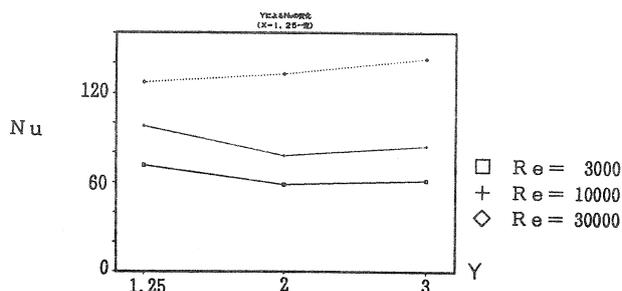


図29 配管ピッチ比 Y によるNuの変化
(配管ピッチ比 X=1.25)

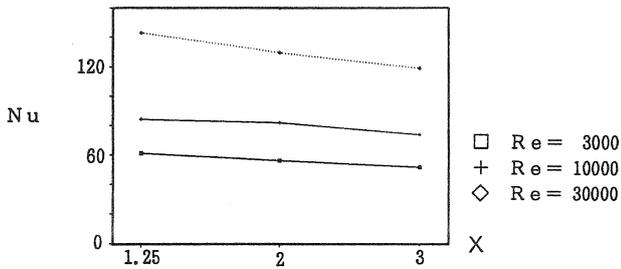


図30 配管ピッチ比XによるNuの変化
(配管ピッチ比Y = 3)

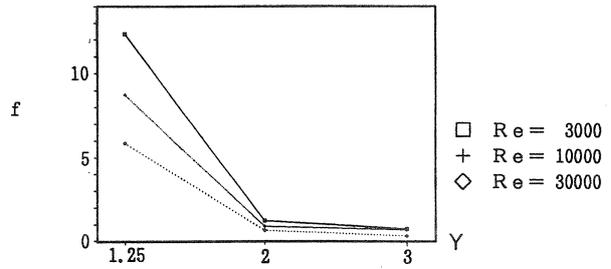


図31 配管ピッチ比Yによる圧力降下係数 f の変化
(配管ピッチ比X = 1.25)

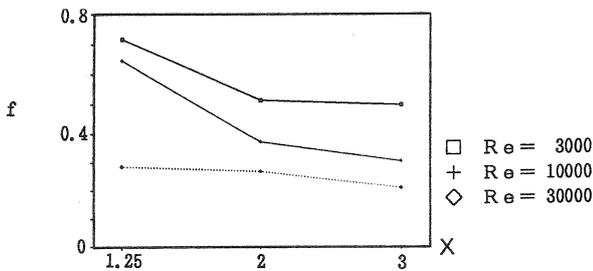


図32 配管ピッチ比Xによる圧力降下係数 F の変化
(配管ピッチ比Y = 3)

8. まとめ

$\kappa - \epsilon$ 乱流モデルを用いた単管モデルでの乱流熱伝達解析(空気流)を行った結果、Nuの平均値は、およそ $5000 < Re < 40000$ の範囲で経験値と良好な合致を示した。しかし管壁のNu分布については経験値と異なり、後流側でのNuの顕著な増大が認められなかった。

同様の千鳥型管列モデルでは上記のReの範囲でNuの平均値は経験値と同様の増加傾向を示した。また配管ピッチ比の影響については、XとNu及びfの増減関係や分布傾向が明らかなのに比べ、YではReの大小などによりNuとの増減関係や分布傾向は複雑な変化を示した。但しYとfは顕著な相関を示した。

9. おわりに

本論文で利用した流体解析ソフトFLUENTについては、その利用や技術指導で(株)流体コンサルタントの毛利昌康氏、小林克雄氏にお世話になりました。お礼申し上げます。

参考文献

- 1) C.G. Speziale and S. Thangam, "Analysis of an RNG Based Turbulence Model for Separated Flows", Int. J. Engng Sci. Vol.30, No.10, 1992
- 2) 日本機械学会, 流れの数値シミュレーション, コロナ社, 1988
- 3) 原田幸夫, 流体力学・水力学演習, 槇書店, 1977
- 4) H.P. スウ, ベクトル解析, 森北出版, 1980
- 5) Fluent. Inc, FLUENT User's Guide, Fluent. Inc, 1991
- 6) 毛利昌康, "汎用熱流体解析プログラムFluent", 配管技術, 2, 1988
- 7) B.E. Launder and D.B. Spalding, "The Numerical Computation of Turbulent Flows", Computer methods in applied mechanics and Engineering, 3, 1974
- 8) スハス V. パタンカー, コンピュータによる熱移動と流れの数値解析, 森北出版, 1985
- 9) 日本機械学会, 伝熱工学資料(改訂4版), 丸善, 1991